Geometria Analítica E Cônicas

Doherty Andrade

Sumário

1 Conjuntos

O conjunto é um conceito básico que não podemos definir de uma maneira formal. Porem nesta seção daremos as noções deste conceito.

Um conjunto é formado de objetos que chamamos seus elementos. A relação entre conjunto e elemento é de pertinência. Quando um objeto x é um dos elementos que compõem o conjunto A, dizemos que x pertence a A e escrevemos

$$x \in A.$$

Fica definido um conjunto quando se conhecem seus elementos.

Exemplos

1. Os conjuntos de números naturais: $\mathbb{N}$, formado por $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots, n \cdots\}$

2. O conjunto de números inteiros $\mathbb{Z} = \{\cdots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$

3. O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q} = \{p/q; \;\; p, q \in \mathbb{Z}\}$

4. O conjunto dos números Reais $\mathbb{R}$

5. O conjunto dos números complexos $\mathbb{C} = \{a + ib; \;\; a, b \in \mathbb{R}\}$

6. Podemos numerar diversos conjuntos como

$$\{x \in \mathbb{N}; x \geq 3\}, \qquad \{x \in \mathbb{Q}; 1 \leq x \leq 5\}, \qquad \{x \in \mathbb{Z}; x \geq 2\}$$

7. O Conjunto $\{x \in \mathbb{R}; \;\; x^2 < 0\}$, é um conjunto que não tem nenhum elemento. Este conjunto é muito importante e é chamado de conjunto vazio.

O conjunto sem elementos será chamado de conjunto vazio, e será denotado por $\emptyset$ ou $\{ \;\; \}$.

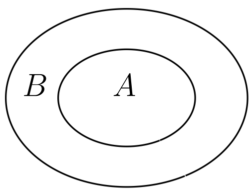
2 Relações entre conjuntos

Temos duas importantes relações entre conjuntos, uma delas é a chamada inclusão e a outra é a igualdade.

Definição 2.1 (Inclusão) *Diremos que um conjunto A está contido num conjunto B se todo elemento de A é também um elemento de B. Fazemos referência a esta relação com o símbolo $\subset$*

$$A \subset B \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in A \quad \Rightarrow \quad x \in B$$

Se A está contido em B também dizemos que A é um subconjunto de B.



Exemplo 2.1 *Dos exemplos anteriores concluímos que*

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Exemplo 2.2 *O conjunto vazio é um subconjunto de todo conjunto.*

Definição 2.2 *Seja X um conjunto. Chamaremos conjunto Potência de X, ao conjunto que é formado por todos os subconjuntos de X. É denotado como $\mathcal{P}$ ou 2^X.*

Exemplos

1. Se $X = \{a, b, c\}$. O conjunto potência 2^X é dado por

$$2^X = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

2. Se X tem n elementos então o conjunto potência tem 2^n elementos.

3. $X, \emptyset \in 2^X$.

Definição 2.3 (Igualdade) *Diremos que um conjunto A é igual a um conjunto B se e somente se*

$$A \subset B \quad e \quad B \subset A.$$

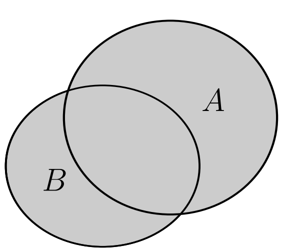
3 Operações entre conjuntos

Entre as principais operações entre conjuntos podemos citar, a união, interseção, diferença e produto cartesiano.

União

Sejam A e B dois conjuntos. A união de conjuntos é definida como o conjunto que possui todos os elementos de A e de B e é denotada como

$$A \cup B = \{x; \; x \in A \text{ ou } x \in B\}$$



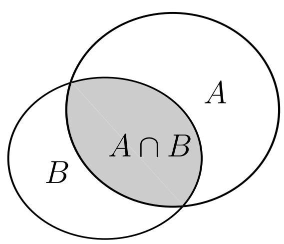
Propriedades

- $A \subset A \cup B \qquad B \subset A \cup B$
- $A \cup A = A$
- $A \cup B = B \cup A$
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Interseção

A interseção de dois conjuntos A, B é formada pelos elementos comuns a A e B. O operador interseção é denotado por $\cap$. Assim teremos que

$$A \cap B = \{x;\ \ x \in B \ \text{ e } \ x \in A\}$$



Propriedades

- $A \cap B \subset A \qquad A \cap B \subset B$
- $A \cap A = A$
- $A \cap B = B \cap A$
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Exemplo 3.1 *Encontrar o conjunto de pontos satisfazendo* $|x| < 1$.

Solução: O problema consiste em encontrar todos os pontos tais que seus valores absolutos sejam menores que 1. Lembremos que $|x| = x$ quando $x \geq 0$. No caso que $x < 0$ então o modulo de x troca de sinal a x para que ele seja positivo. Troca de sinal de um número significa multiplicar ele por -1. Assim teremos que $|x| = -x$. Desta forma temos que

$$|x| = \begin{cases} \ \ x & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{se} \quad x < 0. \end{cases}$$

O conjunto de pontos que satisfaz $|x| < 1$, esta formado por números positivos e números negativos. Portanto se

$$x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad |x| < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq x \leq 1.$$

$$x < 0 \quad \text{e} \quad |x| < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 > x, \quad \text{e} \quad -x < 1 \iff -1 < x < 0$$

Das duas expressões acima concluímos

$$|x| < 1 \iff -1 < x < 1.$$

Em outras palavras:

$$\{x \in \mathbb{R};\ |x| < 1\} =]-1, 1[.$$

Em geral temos a seguinte relação

$$\boxed{|x| < a \iff -a < x < a, \qquad a > 0}$$

Exemplo 3.2 *Encontrar os números reais que satisfazem a desigualdade* $x^2 < b$. *para* $b > 0$

Solução: Para isto utilizaremos a seguinte identidade:

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

De fato, se $x < 0$ então teremos que ao quadrado o número é positivo, e a raiz quadrada de um número positivo é sempre um número positivo. Portanto vale a identidade acima. Finalmente,

$$x^2 < b \iff |x| = \sqrt{x^2} < \sqrt{b}$$

Pelo exercício anterior, concluímos que

$$\boxed{x^2 < b \iff -\sqrt{b} \leq x \leq \sqrt{b}.}$$

Exemplo 3.3 *Encontrar os pontos satisfazendo* $x^2 - 6x + 1 < 0$

Solução: Para encontrar os pontos, que satisfazem esta desigualdade, o que fazemos é completar quadrados.

$$x^2 - 6x + 1 = (x-3)^2 - 9 + 1 = (x-3)^2 - 8.$$

Queremos encontrar os valores de x de tal forma que a expressão acima seja negativa, portanto

$$x^2 - 6x + 1 < 0 \iff (x-3)^2 - 8 < 0.$$

Ou equivalentemente

$$(x-3)^2 < 8 \iff -\sqrt{8} < x - 3 < \sqrt{8}.$$

Somando 3 a segunda desigualdade, encontramos que $3-\sqrt{8} < x < 3+\sqrt{8}$. Portanto, o conjunto de pontos satisfazendo $x^2 - 6x + 1 < 0$ é igual ao intervalo $]3-\sqrt{8}, 3+\sqrt{8}[$.

Exemplo 3.4 *Encontrar o conjunto de pontos satisfazendo* $|x| > a$*, para* $a > 0$*.*

Solução: Novamente aqui aplicamos a definição de valor absoluto. Assim dividiremos nosso estudo em duas partes. $x \geq 0$ e $x < 0$, desta forma temos

$$x \geq 0 \quad \text{e} \quad |x| > a \iff 0 < x \quad \text{e} \quad x > a \iff x > a.$$

$$x < 0 \quad \text{e} \quad |x| > a \iff 0 > x \quad \text{e} \quad -x > a \iff x < -a.$$

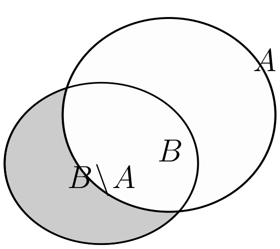
Portanto

$$\boxed{|x| > a \iff x \in]-\infty, -a[\cup]a, \infty[.}$$

Diferença de conjuntos

A diferença de dois conjuntos A, B denotada por $A \setminus B$ é formada pelos elementos de A que não pertencem a B:

$$A \setminus B = \{x; \;\; x \in B \;\text{ e }\; x \notin A\}$$



Propriedades

- $A \setminus B = A \setminus A \cap B$
- Se $A \cap B = \emptyset \quad \Rightarrow \quad A \setminus B = A$
- Se $A \subset B$ então a diferença $A \setminus B$ é chamada de complemento de A com respeito a B
- Seja E é o conjunto universal, isto é o conjunto que contem todos os conjuntos num certo estudo, então $E \setminus A$ é chamado de complemento de A e é denotado por A^c.

Produto Cartesiano

O produto cartesiano de dois conjuntos A e B, $A \times B$ é o conjunto formado pelos pares ordenados (a, b) cuja primeira coordenada pertence a A e a segunda coordenada pertence a B. Isto é

$$A \times B = \{(a, b); \;\; a \in A, \;\; b \in B\}$$

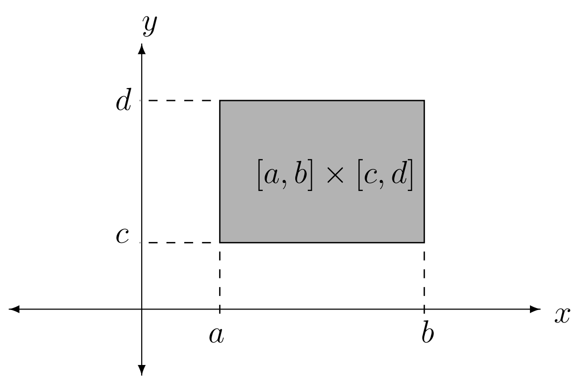
Exemplo 3.5
- *Se $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{1, 2\}$ o conjunto produto cartesiano é dado por*

$$A \times B = \{(a, 1), (b, 1), (c, 1), (a, 2), (b, 2), (c, 2)\}$$

- *Se $A = B$ o produto cartesiano é denotado por A^2, isto é*

$$A \times A = A^2$$

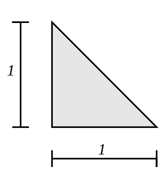
- *Se $A = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $B = [c, d] \subset \mathbb{R}$. O produto cartesiano destes intervalos será o retângulo do plano formado pelos pontos $[a, b] \times [c, d]$.*



- *O conjunto dos pontos (a, a) do Conjunto $A \times A$ é chamado de diagonal.*

4 Os números

O sistema numérico que usamos atualmente é o sistema arabico, que foi inicialmente desenvolvido na India. Posteriormente os gregos estenderam este sistema de números para os racionais, isto é números que são expressados pelo quociente de dois números naturais e também estenderam para os números irracionais. Números que não podem ser expressados pelo quociente de dois números. é simples imaginar como os números racionais aparecieram. Pela necessidade de dividir. Mas a aparição dos números irracionais resulta mais complexo de imaginar. Portanto merece uma rápida explicação. Quando Pitágoras mostrou que o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos apareceu, por exemplo, a necessidade de medir a hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles de lado igual a 1. Obtém-se assim o valor de $\sqrt{2}$ para a hipotenusa.



Mas na época não se sabia calcular este número pois todos os números conhecidos eram apenas os racionais. Pensaram num primeiro momento que $\sqrt{2}$ também fosse um número racional. Mas logo se mostrou que isto não era verdade. Então a partir desse ponto se descobriu que existiam mais números que o que se pensava na época. Esse conjunto de números foi chamado de Números irracionais.

5 Existencia dos números irracionais

A manera de ilustração mostraremos que $\sqrt{2}$ não é um número racional. Para isto utilizaremos um método de demonstração por contradição. Isto é suponhamos falsa nossa conclusão, tentaremos chegar a uma contradição. Isto é se

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

Podemos supor que p e q sejam primos entre si, isto é que não tenham nenhum divisor em comum. Se eles não tem divisores em comum, então seus quadrados também não terão. Portanto teremos que

$$q \text{ não divide a } p^2$$

Da identidade acima concluímos que

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \quad \Rightarrow \quad p^2 = 2q^2$$

De onde segue que q divide a p^2 que é uma contradição à escolha que fizemos de p e q. Esta contradição vem de supor que $\sqrt{2}$ possa ser expressado como um número racional. Portanto $\sqrt{2}$ não é um número racional.

6 Funções

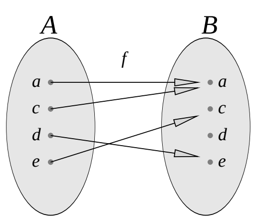
Dados dois conjuntos A e B diremos que f é uma função $f : A \to B$ se para cada elemento de A existe um único elemento $f(x) \in B$, chamado valor da função. Muitas vezes usamos a notação

$$f : A \to B$$

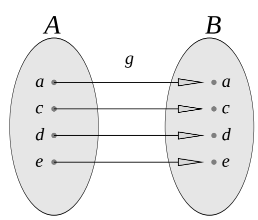
$$x \in A \mapsto f(x) \in B.$$

O conjunto A é chamado de domínio e o conjunto B de contradomínio.

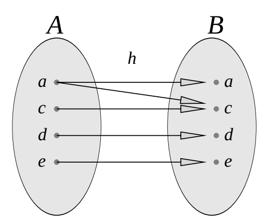
Uma observação importante, não devemos de confundir f com $f(x)$. De acordo a nossa definição f representa a função que existe entre A e B enquanto que $f(x)$ é apenas um valor de f.



f define uma função



g define uma função



h não define uma função

A definição de função, exige que f esteja definida unívocamente para todo valor em A, por este motivo h não é uma função nos gráficos acima.

Definição 6.1 *Diremos que duas funções $f : A \to B$ e $g : C \to D$ são iguais se e somente se*

$$A = C, \quad B = D, \quad e \quad f(x) = g(x), \ \forall x \in A = C$$

Exemplo 6.1 *As funções $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^2$ não é igual a função $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida como $g(x) = x^2$, pois a pesar de que as relações funcionais são as mesmas os domínios da funções são diferentes.*

Exemplo 6.2 *As funções* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida como* $f(x) = 1 + x^3$ *não é igual a função* $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ *definida como* $g(x) = 1 + x^3$, *porque os domínios da funções são diferentes.*

Definição 6.2 *Diremos que a função* $f : A \to B$ *é uma extenção de* $g : C \to B$ *se*

$$A \supset C, \quad e \quad f(x) = g(x) \;\; \forall x \in C$$

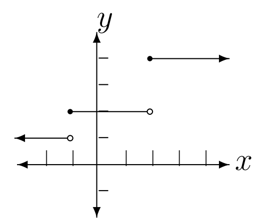
Exemplo 6.3 *A função* $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ *definida no exemplo (6.2) é uma extensão da função* $f :]0,1[\to \mathbb{R}$.

Definição 6.3 *Diremos que a função* $f : A \to B$ *é uma restrição de* $g : C \to B$ *se*

$$A \subset C, \quad e \quad f(x) = g(x) \;\; \forall x \in A$$

Exemplo 6.4 *Em muitas aplicações aparecem funções multiplamente definidas, por exemplo*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & se\ x < -1 \\ 2 & se\ -1 \le x < 2 \\ 4 & se\ x \ge 2 \end{cases}$$



Exemplo 6.5

- *Um exemplo de função numérica é dada por*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = x^2 + x + 1$$

- *Um exemplo de função multidefinida é dada pelo valor absoluto.*

$$|x| = \begin{cases} x, & se \quad x \ge 0 \\ -x, & se \quad x < 0 \end{cases}$$

Definição 6.4 *Chamaremos de gráfico de* $f : A \to B$ *ao conjunto que denotaremos por* G_f *e está dado por*

$$G_f = \{(x,y) \in A \times B; \;\; y = f(x)\}$$

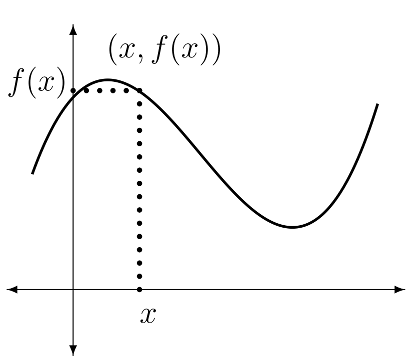
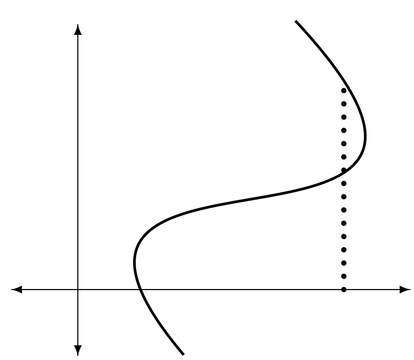


Gráfico de uma função



Não é gráfico de uma função

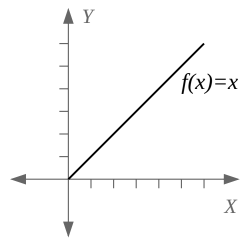
Exemplo 6.6 *Faça o gráfico da função* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, *definida como* $f(x) = x$

Solução: Neste caso o gráfico da função estará dada pelo conjunto

$$G_f = \{(x, x), \;\; x \in [0, 1]\}$$

Trazando o gráfico no plano cartesiano obtemos

x_i	$f(x_i)$
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5



Definição 6.5 *Diremos que uma função $f : A \to B$ é injetiva se $f(x) = f(y) \quad \Rightarrow \quad x = y$. Diremos que uma função é sobrejetiva (ou simplemente sobre) quando para todo $y \in B$ existe pelo menos um $x \in A$ tal que $y = f(x)$. Finalmente diremos que $f : A \to B$ é bijetora (bijeção ou biunívoca) quando é injetiva e sobrejetiva.*

Exemplo 6.7 *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x + 1$ é uma função injetora e sobrejetora. De fato mostraremos primeiro que f é bijetora, para isto supomos que $f(x) = f(y)$ de onde temos que*

$$2x + 1 = 2y + 1 \iff x = y.$$

Para mostrar que f é sobrejetora, tomamos um número real qualquer, por exemplo b e provaremos que existe um elemento $a \in \mathbb{R}$ de tal forma que $f(a) = b$. isto é devemos ter que

$$2a + 1 = b \quad \Rightarrow \quad a = \frac{b-1}{2}.$$

Portanto, tomando $a = (b-1)/2$ encontramos que $f((b-1)/2) = b$, que significa que f é uma função sobrejetóra.

Exemplo 6.8 *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$ é uma função injetora e sobrejetora. De fato mostraremos primeiro que f é bijetora, para isto supomos que $f(x) = f(y)$ de onde temos que*

$$x^3 - y^3 = 0 \iff (x-y)(x^2 + xy + y^2) = 0$$

Temos então que $x = y$ ou $x^2 + xy + y^2 = 0$. No último caso, não consideramos esta equação porque somente tem soluções complexas. De fato, podemos considerar $y^2 + xy + x^2 = 0$ uma equação em y, resolvendo encontramos que

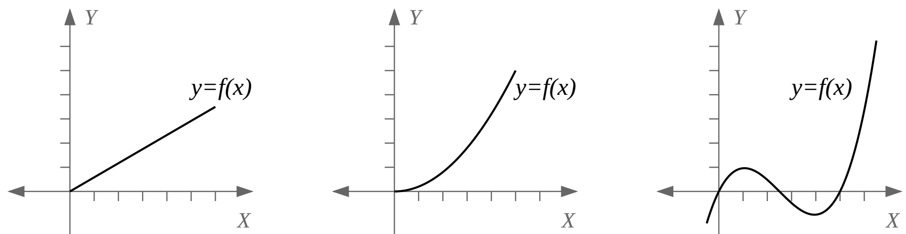
$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{x^2 - 4x^2}}{2} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{-1 \pm x\sqrt{3}i}{2}.$$

Não aceitamos esta solução, pois f é uma função a valores reais. Logo, temos que $x = y$ de onde concluímos que f é injetora.

Para mostrar que f é sobrejetora, tomamos um número real qualquer, por exemplo b e provaremos que existe um elemento $a \in \mathbb{R}$ de tal forma que $f(a) = b$. Para isto basta considerar $a = \sqrt[3]{b}$ que verifica

$$f(a) = f(\sqrt[3]{a}) = (\sqrt[3]{a})^3 = a.$$

Portanto f é uma função bijetora.



Função Injetora   Função Injetora   Função não Injetora

No gráfico acima, note que a terceira função possui 3 valores diferentes quando $y = 0$, que correspondem as raízes de f. Portanto neste caso a função não é injetora.

Definição 6.6 *Seja $f : A \to B$ uma função e denotemos por $X \subset A$, chama-se imagem de X ao conjunto*

$$f(X) = \{f(x); \;\; x \in X\}$$

Propriedades Seja $f : A \to B$ uma função e $X, Y \subset A$. Então teremos que

- $f(\emptyset) = \emptyset$
- $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$
- $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$
- $X \subset Y \quad \Rightarrow \quad f(X) \subset f(Y)$

Exemplo 6.9 *Encontrar a Imagem da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$*

Solução: É importante diferenciar entre imagem de uma função e contradomínio. Na função acima o contradomínio da função são os reais, mais a imagem é o conjunto

$$f(\mathbb{R}) = \text{Imagen}(f) = \{f(x); \;\; x \in \mathbb{R}\}$$

Note que para todo número real $x \in \mathbb{R}$ sua imagem por f é um número positivo. Portanto teremos que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+ \cup 0$. Onde por $\mathbb{R}_+$ estamos denotando o conjunto de reais positivos.

Exemplo 6.10 *Encontrar o maior conjunto que onde a função*

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 3x + 2}$$

Esta bem definida

Solução: Na função anterior a única possibilidade em que a função f não está bem definida, é quando seu denominador é zero. Portanto o maior conjunto no qual a função esta definida são os números reais exceto os valores onde o denominador se anula. Para calcular estes valores temos que encontrar as raízes do polinômio $x^2 - 3x + 2 = 0$, usando a fórmula encontramos

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} \quad \Rightarrow \quad x = 1, \quad \text{ou} \quad x = 2.$$

De onde temos que

$$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}.$$

Exemplo 6.11 *Encontre o maior conjunto sobre o qual a função* $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$, *está bem definida*

Solução: Neste caso a única possibilidade em que a função não está bem definida sobre os números reais, é quando o radicando é um número negativo. Portanto o maior conjunto de números reais sobre o qual a função f está bem definida é igual ao conjunto de valores x tais que

$$x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 - 4 + 3 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad (x-2)^2 \geq 1.$$

De onde encontramos que

$$x^2 - 4x + 3 \geq 0 \iff x - 2 \leq -1 \quad \text{ou} \quad x - 2 \geq 1 \iff x \leq 1 \quad \text{ou} \quad x > 3.$$

Isto é

$$x^2 - 4x + 3 \geq 0 \iff x \in]-\infty, 1[\cup]3, \infty[.$$

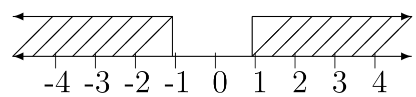
Portanto o domínio de f é dado por

$$\mathcal{D}f = \mathbb{R} \backslash]1, 3[.$$

Exemplo 6.12 *Encontre o domínio e a imagem da função* $G(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

A função estará bem definida sobre $\mathbb{R}$ se o radicando é positivo ou nulo. Assim teremos que

$$\text{Domínio } G = \left\{x; \quad x^2 > 1\right\} = \{x; x > 1, \text{ ou } x < -1\} =]-\infty, -1[\cup]\infty, 1[.$$



Como conclusão, toda vez que apareça uma raiz quadrada, para calcular o domínio devemos ter que o radical seja positivo.

Exemplo 6.13 *Calcular o domínio da função* g *dada por* $g(x) = \frac{x^2+3x+1}{x^2-1}$

Neste caso a única restrição para os valores de x é que o denominador não seja zero. Assim teremos que $x \neq -1$ e $x \neq 1$. Portanto

$$\text{Dom}(g) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

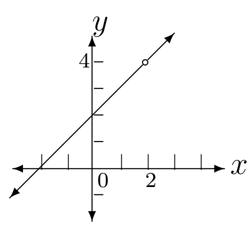
Exemplo 6.14 *Encontrar o domínio e imagem da função*

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

Solução.- Para encontrar o domínio, devemos lembrar as operações que são vedadas nos números reais. Neste caso a única operação vedada é a divisão por zero.

Assim o domínio é dado por

$$\text{Dom } (f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$



O cálculo da imagem de uma função em geral é uma tarefa mais complicada. Neste caso temos que

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2$$

Assim para $x \neq 2$ temos que $f(x) = x + 2$. Como $x \neq 2$ devemos ter que $f(x) \neq 4$, de onde a imagem esta dada por:

$$\text{Imagem } (f) = \mathbb{R} \setminus \{4\}$$

Exemplo 6.15 *Encontrar o domínio e a imagem da função*

$$f(x) = |x| + |x-2|$$

Solução.- é simples de verificar que na definição da função f não existe nenhum tipo de operação vedada. Portanto o domínio de f serão todos os números reais:

$$\text{Domínio } (f) = \mathbb{R}$$

A imagem da função é um pouco mais difícil. Como discutimos na definição da função valor absoluto, sabemos que para calcular o valor de $|x|$ temos duas opções: x é negativo ou não negativo. Quando temos soma de dois valores absolutos o número de possibilidades aumenta. Para cada somando teremos duas possibilidades, portanto para calcular a soma temos quatro possibilidades que podem tomar o valor da soma. Conforme estas possibilidades podemos construir explicitamente a função f.

$\lvert x\rvert$	$\lvert x-2\rvert$
$+$	$+$
$+$	$-$
$-$	$+$
$-$	$-$

Assim observando o quadro e lembrando a definição de valor absoluto podemos escrever

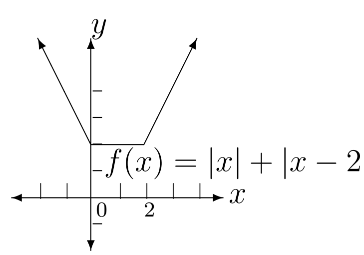
$$f(x) = \begin{cases} x + (x-2) = 2x - 2 & \text{quando} \quad x \geq 0 \text{ e } x \geq 2 \\ x - (x-2) = 2 & \text{quando} \quad x \geq 0 \text{ e } x < 2 \\ -x + (x-2) = -2 & \text{quando} \quad x < 0 \text{ e } x \geq 2 := \emptyset \\ -x - (x-2) = -2x + 2 & \text{quando} \quad x < 0 \text{ e } x < 2 \end{cases}$$

Na primeira equação da função anterior a condição $x \geq 0$ e $x \geq 2$ deve ser válida simultaneamente,

$$x \geq 0 \text{ e } x \geq 2 \quad \Rightarrow \quad x \geq 2$$

Na terceira equação a condição que deve satisfazer x é vazia, portanto essa equação não é considerada. Assim temos que a função f esta dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{para} \quad x \geq 2 \\ 2 & \text{para} \quad 0 \leq x < 2 \\ -2x + 2 & \text{para} \quad x < 0 \end{cases}$$



Do gráfico vemos que $\text{Ima}(f) = [2, +\infty[$.

Exemplo 6.16 *Encontrar o domínio e a imagem da função*

$$f(x) = |x| - |x-2|$$

De forma análoga teremos que não existe nenhum tipo de operação vedada. Portanto o domínio de f serão todos os números reais $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$. Vejamos como muda a imagem da função. A análise das variações dos sinais é o mesmo que na função anterior portanto teremos que

$\lvert x\rvert$	$\lvert x-2\rvert$
$+$	$+$
$+$	$-$
$-$	$+$
$-$	$-$

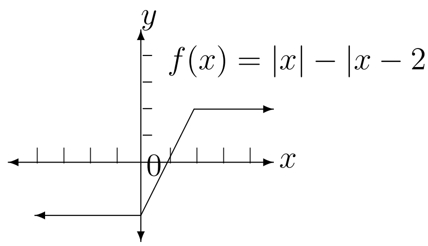
$$f(x) = \begin{cases} x - (x-2) = 2x - 2 & \text{para} \quad x \geq 0 \text{ e } x \geq 2 \\ x + (x-2) = 2 & \text{para} \quad x \geq 0 \text{ e } x < 2 \\ -x - (x-2) = -2 & \text{para} \quad x < 0 \text{ e } x \geq 2 := \emptyset \\ -x + (x-2) = -2x + 2 & \text{para} \quad x < 0 \text{ e } x < 2 \end{cases}$$

Note que na primeira equação da função anterior temos

$$x \geq 0 \text{ e } x \geq 2 \quad \Rightarrow \quad x \geq 2$$

Na tercerira equação a condição que deve satisfazer x é vazia, portanto essa equação não é considerada. Assim temos que a função f esta dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{para} \quad x \geq 2 \\ 2x - 2 & \text{para} \quad 0 \leq x < 2 \\ -2 & \text{para} \quad x < 0 \end{cases}$$



Este resultado é bastante ilustrativo pois vemos como apenas uma modificação do sinal implica uma variação bastante grande no resultado. Desta vez teremos que a imagem da função é dado por: $\text{Ima}(f) = [-2, 2]$.

7 Composição de Funções

Nesta seção estudaremos uma nova operação entre funções chamada de composição.

Definição 7.1 *Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ duas funções. Diremos que h é a composição das funções f e g se $h : A \to \mathbb{R}$, $\forall x \in A$, $h(x) = f(g(x))$. Onde $A = \{x \in [c, d]; \; g(x) \in [a, b]\}$. A função h é denotada como $h = f \circ g$.*

Exemplo 7.1 *Encontre a composição de funções $f(x) = \sqrt{x - 1}$ com $g = \cos(x)$*

Solução: Note que a função f não está definida para valores menores do que $x = 1$. Enquanto que o $\cos(x)$ so tem valores menores do que 1. Portanto a composição $f \circ g$ não existe. Por outro lado a composição entre g com f se existe e é dado por

$$h = g \circ f : A \to \mathbb{R}, \qquad h(x) = \cos(\sqrt{x - 1}).$$

Onde $A = \{x \in \mathbb{R}; \;\; x \geq 1\}$. Este é um exemplo simples de que nem sempre existe a composição de funções e que ela não é comutativa.

Exemplo 7.2 *Encontre a composição das funções $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = 3x - 1$.*

Solução: Note que ambas as funções f e g estão definidas sobre todo o conjunto de números reais. A composição $f \circ g$ está dada por

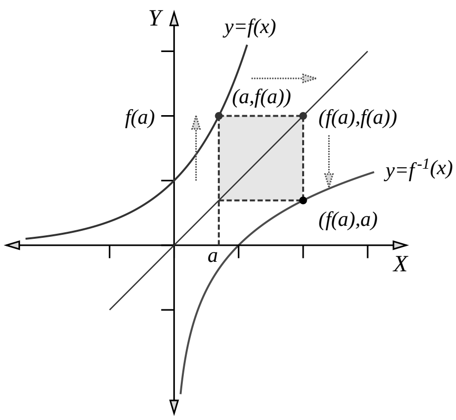
$$f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f \circ g(x) = (3x - 1)^2 - 1.$$

Enquanto que a composição entre g e f está dada pela função h definida por

$$h = g \circ h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g \circ h(x) = 3(x^2 - 1) - 1.$$

8 Função Inversa

Definição 8.1 *Diremos que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é a função inversa pela esquerda de $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ se $f \circ g = I$. Analogamente, diremos que $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ é a função inversa pela direita de $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ se $g \circ f = I$. Onde por I estamos denotando a função identidade $I(x) = x$.*



Dado o gráfico de uma função, podemos calcular o gráfico de sua inversa. Para isto nos auxiliaremos do gráfico da função identidade. Tomemos um ponto qualquer da curva $y = f(x)$, por exemplo o ponto $(a, f(a))$, através de uma reta horizontal intersetamos a diagonal no ponto $(f(a), f(a))$. Neste ponto trazemos uma reta vertical e a intersetamos com a reta horizontal partindo do ponto (a, a). Este ponto terá como coordenadas $(f(a), a)$ e pertence ao gráfico da função inversa de f, pois $(f(a), f^{-1}(f(a))) = (f(a), a)$.

Uma outra conclusão importante que podemos concluir do gráfico é que a função f e sua inversa são simétricas com respeito a diagonal.

Exemplo 8.1 *Calcular a função inversa de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$*

Solução: Temos que procurar uma função g tal que $f(g(x)) = x$ isto é:

$$f(g(x)) = g(x)^2 = x \quad \Rightarrow \quad g(x) = \pm\sqrt{x}.$$

Note que neste caso temos duas funções inversas: $g_1(x) = \sqrt{x}$, $g_2(x) = -\sqrt{x}$ e seus domínios são $\mathbb{R}_+$.

Exemplo 8.2 *Calcular a função inversa de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$*

Solução: Temos que procurar uma função g tal que $f(g(x)) = x$ isto é:

$$f(g(x)) = 2g(x) + 1 = x \quad \Rightarrow \quad g(x) = \frac{x - 1}{2}.$$

Portanto a função inversa é dada neste caso por $g(x) = \frac{x-1}{2}$ com domínios $\mathbb{R}$.

Exercícios

1. Calcular as funções inversas das seguintes funções

$$a) \; y = x^2 - 3x, \quad b) \; y = \frac{x + 1}{x - 1}, \quad c) \; y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

Resp: a) $3 + \sqrt{9 + 4y}/2$, $3 - \sqrt{9 + 4y}/2$, b) $x = (y + 1)/(y - 1)$ c) $x = \sqrt{(y + 1)/(y - 1)}$, $x = -\sqrt{(y + 1)/(y - 1)}$

2. Encontre o valor de a de tal forma que a função $y = \sqrt{\frac{x+a}{x-2a}}$ tenha inversa no intervalo $]-1, 1[$.

3. Encontre os valores de a para que exista composição entre as funções

$$f(x) = \sqrt{\frac{x+a}{x-2a}}, \quad g(x) = \sqrt{x^2 - a^2}$$

4. Determine o domínio da composição das seguintes funções:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2x+a}{5x-2a}}, \quad g(x) = \sqrt{4x^2 - a^2}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+3}}, \quad g(x) = x^2$$

5. Verifique em que casos não existem composição de funções

$$a) f(x) = -x^2, \;\; g(x) = \sqrt{x}, \qquad b) f(x) = -x^2 - 2x - 1, \;\; g(x) = \sqrt{2x+2},$$

$$a) f(x) = -x^3, \;\; g(x) = \sqrt[3]{x}.$$

Resp: a) $f \circ g$ existe, $g \circ f$ não existe. c) Sempre existe composição.

6. Faça o gráfico das seguintes funções

$$f(x) = 2x + 2, \quad f(x) = \sqrt{x+2}, \quad f(x) = \frac{3x+2}{2x-1}.$$

7. Grafique as funções inversas no exerício anterior.

8. Faça a composição das seguintes funções
   (a) $f(x) = x^2 - x + 1$, $g(x) = \cos(x) - 1$, $f \circ g$.
   (b) $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = \tan(x)$, $f \circ g$.
   (c) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $g(x) = \tan(x)$, $f \circ g$.
   (d) $f(x) = x^3 - 1$, $g(x) = \sqrt{x}$, $f \circ g$.
   (e) $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$, $g(x) = x^3$, $f \circ g$.
   (f) $f(x) = e^x$, $g(x) = e^x$, $f \circ g$.
   (g) $f(x) = e^{e^x}$, $g(x) = e^x$, $f \circ g$.

9. Encontre o domínio da composição das seguintes funções
   (a) $f(x) = x^3 - 2x + 1$, $g(x) = e^x - 1$, $f \circ g$.
   (b) $f(x) = 3x^2 + 1$, $g(x) = 3\tan(x) - 1$, $f \circ g$.
   (c) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sin(x)$, $f \circ g$.
   (d) $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$, $g(x) = x^3$, $f \circ g$.

10. Grafique as seguintes funções
   (a) $f(x) = x^3 - 2x + 1$, no intervalo $[-1, 1]$.
   (b) $f(x) = |x-1| - |x+3|$, no intervalo $[-5, 5]$.
   (c) $f(x) = |x-1| - |2x+3|$, no intervalo $[-5, 5]$.
   (d) $f(x) = |x+1| + |x+2| + |x+3|$, no intervalo $[-9, 9]$.

11. Encontre o conjunto solução das seguintes desigualdades
   (a) $x^2 - 2x + 1 < 0$, **Resp:** $\emptyset$
   (b) $|x-1| - |x+3| < 2$, **Resp:** $]-2, \infty[$
   (c) $x^3 - 2x^2 + 1 \leq 0$, **Resp:** $]-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}] \cup [1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}]$
   (d) $x^4 - 3x^2 + 2 \geq 0$. **Resp:** $[-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}]$
   (e) $\frac{3x^2-2x-1}{x^2-1} \leq 0$, **Resp:** $[-1, -\frac{1}{3}]$

(f) $\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3} \leq 0$, **Resp:** $[2,3]$

(g) $\frac{x\sqrt{x-1}}{x^2-1} \leq 0$, **Resp:** $\emptyset$

(h) $x^3 - x^2 - 3x + 3 \leq 0$, **Resp:** $]-\infty, -\sqrt{3}] \cup [1, \sqrt{3}]$

(i) $x^3 - 2x^2 - 3x + 4 \leq 0$, **Resp:** $]-\infty, -\frac{\sqrt{17}-1}{2}] \cup [1, \frac{\sqrt{17}+1}{2}]$

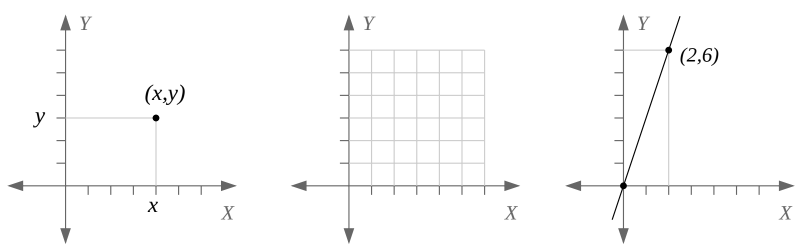
12. Mostre que em todo intervalo $]a, b[$ sempre existe um número racional, isto é um número da forma p/q onde p e q são inteiros.

9 Geometria Euclideana e Geometria Analítica

Começaremos nosso estudo estabelecendo algumas diferências entre a Geometría Euclideana, e a Geometría analítica.

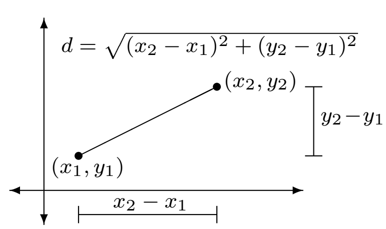
Na geometría euclidiana as figuras geométricas se estudam sem um sistema de referência, apenas baseados nos conceitos de distância, paralelismo etc. Isto é não importa considerar um triângulo numa posição horizontal o vertical. O triângulo sempre é o mesmo.

A Geometría analítica foi descoberta por um matemático frances chamado Rene Descartes, que em seu livro "O discurso do Método", defendia a tese de que todo problema, poderia ser transformado numa equação matemática. Na verdade isto é apenas uma verdade parcial, que se verifica, por exemplo na Geometria. De fato, Descartes introduz um sistema de referências formados por dois eixos, um horizontal chamado de abscissa e outro vertical chamado de eixo de ordenadas. As figuras passam a ocupar uma determinada posição. Um ponto por exemplo esta definido pelas coordenada (x, y) no sistema de referências, chamado de sistema cartesiano para homenagear a Descartes, seu descobridor.



Portanto toda figura geométrica passa a ter uma equação associada a ela. Os pontos começam ter uma importância especial, assim por exemplo a reta que passa pelos pontos $(0, 0)$ e $(2, 6)$ passa ter uma equação que a carateriza, esta equação é $y = 3x$, e assim por diante.

10 Distância entre dois pontos



Definido um sistema de eixos coordenados, cada ponto do plano está associado a um par ordenado. Dados dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2), determinaremos a distância entre eles. Auxiliando-nos do gráfico ao lado e pelo Teorema de Pitágoras encontramos que a distância d entre os pontos é dada por

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Exemplo 10.1 *Calcular a distância entre os pontos* $(3, 4)$ *e* $(2, 1)$

Solução: Usamos a fórmula

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad \Rightarrow \quad d = \sqrt{(3-2)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{1 + 3^3} = \sqrt{10}.$$

Exemplo 10.2 *Encontre o ponto da reta* $y = x + 1$ *mais proxima da origem*

Solução: Tomemos um ponto qualquer da reta, digamos (x, y), consideremos sua distância ao origem,

$$d = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} \quad \Rightarrow \quad d = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Como $y = x + 1$ encontramos que

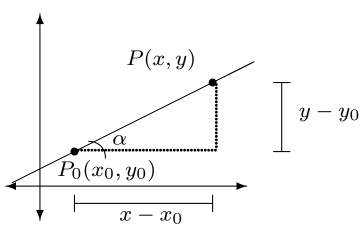
$$d = \sqrt{x^2 + (x+1)^2} = \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = \sqrt{2(x^2 + x + \frac{1}{4}) + \frac{1}{2}} = \sqrt{2(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}}.$$

De uma simples inspeção concluimos que o menor valor de d é atingido quando $x = -\frac{1}{2}$. Qualquer outro valor de x aumenta o valor da distância. Logo o ponto da reta $y = x + 1$ mais próximo da origem é $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

11 A equação da reta

Para encontrar a equação da reta, primeiro devemos lembrar a definição dela. Isto é devemos de caraterizar todos os pontos da reta. Assim podemos estabelecer

Definição 11.1 *A reta é o conjunto de pontos que seguem a mesma direção*



Suponhamos que a reta faça um ângulo de α radianos com o eixo das abscissas e que passe pelo ponto $P_0(x_0, y_0)$. Denotemos por $m = \tan(\alpha)$ e lembremos que α é constante. Se (x, y) é um ponto qualquer da reta devemos ter

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0} \quad \Rightarrow \quad y = m(x - x_0) + y_0$$

Portanto a equação da reta que passa pelo ponto $P_0(x_0, y_0)$ e tem inclinação m é dada por

$$y = mx + b \tag{1}$$

onde $b = -mx_0 + y_0$.

Exercício 11.1 *Calcular a equação da reta que passa pelo ponto (1,0) e tem inclinação $m = 1$.*

Solução.- Como a equação da reta é $y = mx + b$. Para encontrar a equação precisamos de conhecer m e b. Neste caso $m = 1$. Para calcular b aplicamos a condição que a reta passa pelo ponto (1,0). Assim temos

$$0 = m(1) + b = 1 + b \quad \Rightarrow \quad b = -1$$

logo a equação da reta é $y = x - 1$.

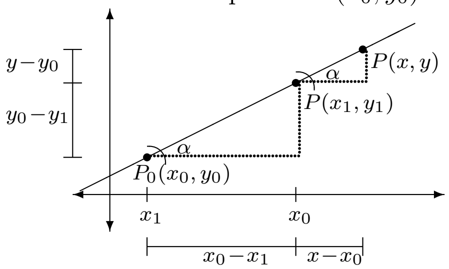
Exercícios

1. Encontre a equação da reta com as seguintes caraterísticas
   (a) Que pase pelo ponto (1,1) y que tenha inclinação de -1.**Resp:** $y = -x + 2$.
   (b) Que pase pelo ponto (-1,1) y que tenha inclinação de 2. **Resp:** $y = 2x + 3$
   (c) Que pase pela origem y que tenha inclinação de 3. **Resp:** $y = 3x$
2. Encontre o ponto da reta $y = 2x + 1$ mais próximo do ponto $(1, 1)$. **Resp:** $(\frac{1}{5}, \frac{7}{5})$.
3. Encontre o ponto da reta $y = x + 3$ mais próximo do ponto $(2, 1)$. **Resp:** $(0, 3)$.
4. Encontre o ponto da reta $y = 5x + 3$ mais próximo do ponto $(-2, 1)$. **Resp:** $(-\frac{6}{13}, \frac{9}{13})$.
5. Mostre que o ponto da reta $y = mx + b$ mais próximo do ponto (x_0, y_0) é dado por $(\dfrac{my_0 - mb + x_0}{m^2 + 1}, \dfrac{m^2 y_0 + mx_0 + b}{m^2 + 1})$

12 Equação da reta que passa por 2 pontos

Em muitos casos é bastante util expressar a equação da reta em função de dois pontos pelos quais ela passa.

Tomemos dois pontos $P(x_0, y_0)$ e $P(x_1, y_1)$.



Para encontrar a equação da reta que passa por estes pontos analisaremos o gráfico ao lado. Da figura obtemos que

$$\tan(\alpha) = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}$$

que representa a equação da reta que passa pelos pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1).

Exercício 12.1 *Calcular a equação da reta que passa pelos pontos: (0,1) e (1,2).*

Solução.- Da equação acima temos que

$$\frac{y-1}{x-0} = \frac{1-2}{0-1} = 2 \quad \Rightarrow \quad y = 2x + 1$$

Exercícios

1. Encontre a equação da reta satisfazendo
   (a) Que pase pelos pontos $(1, 1)$, $(2, 1)$. **Resp:** $y = 1$
   (b) Que pase pelos pontos $(3, 1)$, $(2, 0)$. **Resp:** $y = x - 2$
   (c) Que pase pelo ponto $(2, 3)$, e tenha inclinação 1. **Resp:** $y = x + 1$.
   (d) Que pase pelo ponto $(2, 3)$, e seja horizontal. **Resp:** $y = 3$
   (e) Que pase pelo ponto $(1, 5)$, e seja paralela a diagonal. **Resp:** $y = x + 4$
2. Encontre o ponto da reta que pasa pelos pontos $(0, 1)$ e $(1, 3)$ mais próximo do ponto $(1, 1)$. **Resp:** $(\frac{1}{5}, \frac{7}{5})$.
3. Encontre o ponto da reta que pasa pelos pontos $(0, 3)$, $(2, 5)$ mais próximo do ponto $(2, 1)$. **Resp:** $(0, 3)$.
4. Encontre o ponto da reta que pasa pelos pontos $(0, 3)$, $(5, 28)$ mais próximo do ponto $(-2, 1)$. **Resp:** $(-\frac{6}{13}, \frac{9}{13})$.
5. Definimos distância de um ponto a uma reta como a menor distância que existe entre a reta e o ponto. Calcule a distância entre as seguintes retas e pontos
   (a) $y = 2x - 1$, $(1, 2)$. **Resp:** $d = 2/\sqrt{5}$
   (b) $y + x - 1 = 0$, $(2, 3)$. **Resp:** $d = 2\sqrt{2}$
   (c) $3y + 2x - 1$, $(1, 0)$. **Resp:** $d = 2/\sqrt{13}$
   (d) $y + 4x - 1 = 0$, $(1, 3)$. **Resp:** $d = 12\sqrt{17}$

13 Equação geral da Reta

A equação geral da reta é da forma

$$Ax + By + C = 0$$

Isto significa que toda equação linear pode ser representada por uma reta. Esta equação geral pode ser colocada na forma da equação (1) Fazendo

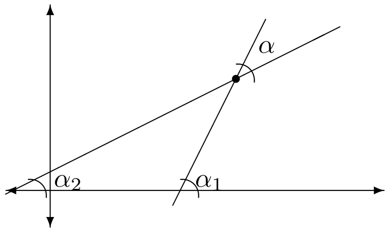
$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{A}$$

como na equação (1) o valor de m representa a inclinação, então teremos que para a equação geral da reta a inclinação esta dada por

$$m = -\frac{A}{B}$$

14 Ângulo entre duas retas

Consideremos duas retas $L_1 : \quad y = m_1x + b_1$ e $L_2 : \quad y = m_2x + b_2$ com inclinações m_1 e m_2 respectivamente. Como estas retas estão continas no mesmo plano, então ou elas se intersetam num ponto ou elas são paralelas. Se elas são paralelas, então suas inclinações devem ser as mesmas. Isto é $m_1 = m_2$. Muitas vezes é conveniente determinar também o ângulo entre estas retas.



O ângulo que formam as retas é dado por $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$. Portanto pelas fórmulas da diferença de ângulos teremos que

$$\tan(\alpha) = \tan(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{\tan(\alpha_1) - \tan(\alpha_2)}{1 + \tan(\alpha_1)\tan(\alpha_2)}$$

Denotemos por m_1 a inclinação da reta L_1 e por m_2 a inclinação da reta L_2.

Da formula acima concluímos que

$$\tan(\alpha) = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1m_2}$$

Em particular, duas retas serão ortogonais quando o ângulo entre elas seja de 90^0, a tangente portanto é infinita. Isto é se a tangente do ângulo que fazem duas retas é ∞, então elas devem ser ortogonais. Portanto a condição de ortogonalidade de duas retas com inclinações m_1 e m_2 é dada por

$$m_1m_2 = -1.$$

Exemplo 14.1 *Calcule o ângulo que fazem as retas $y = 2x - 1$ e $y = 3x + 4$*

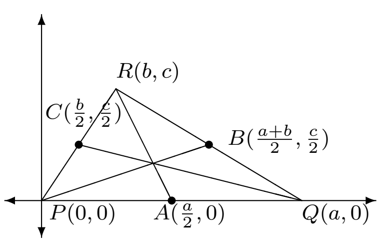
Solução: Usando a fórmula acima encontramos que o ângulo α que fazem estas retas verifica a seguinte condição

$$\tan(\alpha) = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1m_2} = \frac{-1}{1+6} = -\frac{1}{7}.$$

De onde encontramos que $\alpha = \arctan(-\frac{1}{7})$.

Exercício 14.1 *Mostre que as três medianas de um triângulo qualquer se cortam num único ponto chamado Baricentro.*

Solução.- Denotemos por P, Q e R os vértices do triângulo. Observe a figura



Para mostrar que as três retas passem por um único ponto calcularemos primeiro o ponto de interseção de duas retas, por exemplo as retas $\overline{PB}$ e $\overline{AR}$. Finalmente, mostraremos que este ponto pertence também a reta $\overline{QC}$. Assim as equações das retas $\overline{PB}$ e $\overline{AR}$ podem ser escritas como

$$\overline{PB} : \frac{y-0}{x-0} = \frac{0-\frac{c}{2}}{0-\frac{a+b}{2}} = \frac{c}{a+b} \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{c}{a+b}x$$

$$\overline{AR} : \frac{y-0}{x-\frac{a}{2}} = \frac{0-c}{\frac{a}{2}-b} = \frac{2c}{a-2b} \qquad \Rightarrow \qquad y = -\frac{2c}{a-2b}(x-\frac{a}{2})$$

Calculando o ponto de interseção destas retas obtemos

$$\frac{c}{a+b}x = \frac{2c}{2b-a}x - \frac{ac}{2b-a} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{a+b} = \frac{2x}{2b-a} - \frac{a}{2b-a}$$

De onde encontramos que $-3ax = -a(a+b)$, portanto $x = \frac{a+b}{3}$. Sustituindo na equação da reta $\overline{PB}$ teremos $y = \dfrac{c}{3}$. Finalmente, verificaremos que o baricentro pertence a reta $\overline{QC}$. Para isto calcularemos equação da reta $\overline{QC}$:

$$\frac{y-0}{x-a} = \frac{0-\frac{c}{2}}{a-\frac{b}{2}} = -\frac{c}{2a-b} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{c}{b-2a}(x-a)$$

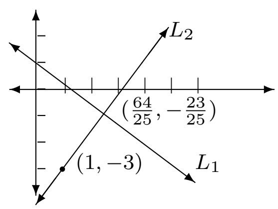
Para $x = \dfrac{a+b}{3}$ teremos que

$$y = \frac{c}{b-2a}(\frac{a+b}{3} - a) = \frac{c}{3}$$

De onde concluímos que as três retas passam pelo ponto $(\frac{a+b}{3}, \frac{c}{3})$

Exercício 14.2 *Calcular a equação da reta que seja ortogonal a reta $L_1: \ 4y = -3x + 1$ e que passe pelo ponto (1,-3).*

Solução.-



Denotemos por L_2 a reta ortogonal a L_1 de inclinação m_2. Da relação de ortogonalidade entre os coeficientes de inclinação teremos que $m_2m_1 = -1$, onde por m_1 estamos denotando a inclinação de L_1. É simples verificar que $m_1 = -3/4$, portanto $m_2 = \frac{4}{3}$. Usando a equação da reta encontramos que

$$\frac{y+3}{x-1} = \frac{4}{3}, \qquad \Rightarrow \qquad 3y = 4x - 3$$

Exercícios

1. Encontrar a inclinação das seguintes retas
   (a) $2y + 3x - 1 = 0$. **Resp:** $m = -\frac{3}{2}$.
   (b) $y + 5x - 1 = 0$. **Resp:** $m = -5$.
   (c) $2y + 6x - 5 = 0$. **Resp:** $m = -3$.
   (d) $8y + 4x - 1 = 0$. **Resp:** $m = -\frac{1}{2}$.
2. Calcular o ângulo que fazem as seguintes retas:
   (a) $2y + 2x - 1 = 0$, $y = 2$. **Resp:** 45^0.
   (b) $y + 5x - 1 = 0$, $2y + 10x - 4 = 0$. **Resp:** 0^0.
   (c) $2y + x - 5 = 0$, $y = 2$. **Resp:** 120^0.
   (d) $8y + 4x - 1 = 0$, $y - 2x - 1 = 0$. **Resp:** 90^0.
   (e) $y + x - 1 = 0$, $y - 3x - 1 = 0$. **Resp:** $\arctan(2)$.
3. Encontre a equação da reta com as seguintes caraterísticas:
   (a) Que pase pelo ponto $(0, 1)$ e que faça um ângulo de 30^0 com a reta $y = x + 3$. **Resp:** $y = \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}x + 1$
   (b) Que pase pela origem e que faça um ângulo de 60^0 com a reta $y = 2x + 3$. **Resp:** $y = \frac{2-\sqrt{3}}{1+2\sqrt{3}}x$
   (c) Que pase pelo ponto $(2, 1)$ e que faça um ângulo de 45^0 com a reta $y = 3x - 2$. **Resp:** $2y = x$.
   (d) Que pase pelo ponto $(2, 3)$ e que faça um ângulo de 45^0 com a reta $y = x - 2$. **Resp:** $y = 3$.
   (e) Que pase pelo ponto $(1, 3)$ e que faça um ângulo de 135^0 com a reta $y = 2x - 2$. **Resp:** $y = -3x + 10$.
4. Mostre que a equação da reta que pasa pelo ponto (x_0, y_0) e faz um ângulo de 45^0 com a reta $my - mx + 5 = 0$ é igual a $y = y_0$.
5. Encontre os pontos de interseção das seguintes retas
   (a) $2y - x + 1 = 0$, $y = x + 3$. **Resp:** $x = -1, \quad y = -2$
   (b) $3x - 2y + 1 = 0$, $x + 3y - 1 = 0$. **Resp:** $x = -1/11, \quad y = 4/11$
   (c) $5x + 4y + 3 = 0$, $2x + y + 5 = 0$. **Resp:** $x = 19/3, \quad y = -17/3$
   (d) $3x - 5y + 5 = 0$, $4x + 3y + 2 = 0$. **Resp:** $x = -25/29, \quad y = 14/29$

Índice Remissivo